E.N.S.A.E. 1982

Option Mathématiques

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(4 h)

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, symétriques (c'est-à-dire : $\forall x\ \forall y\ \ f(y, x) = f(x, y)$), et solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f.$$

1ère partie

On note ici, ainsi que dans la deuxième partie, $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, et Ω l'espace vectoriel des fonctions polynomiales symétriques sur $\mathbb{R}^2$. Soit P un élément non nul de Ω.

1° En utilisant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, montrer que P s'écrit de façon unique :

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-y)^{2i}}{(2i)!} R_i(x + y),$$

où les R_i sont des éléments de $\mathcal{P}$ et $R_n \neq 0$.

2° Montrer que la fonction $(x, y) \longmapsto e^{x+y} P(x, y)$ est un élément de $\mathcal{E}$ si et seulement si, avec les notations de 1°, on a :

(1)
$$\begin{cases} R_n \text{ est une constante non nulle,} \\ \forall i < n \quad R_i'' + 2R_i' = R_{i+1}. \end{cases}$$

Quel est alors, pour tout i, le degré de R_i ? Quel est le degré total de P ?

3° Soit $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{P}$. On note $\varphi\psi$ le composé des éléments φ et ψ de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, φ^r la puissance r-ième de φ dans cette algèbre ($r \in \mathbb{N}$), φ^{-r} la puissance r-ième de φ^{-1} lorsque φ est inversible, I l'endomorphisme unité et d l'endomorphisme $P \longmapsto P'$ de $\mathcal{P}$.

a. Montrer que $(2I + d)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.

b. On note, pour tout entier naturel r, S_r l'image par $(2I + d)^{-r}$ de l'élément de $\mathcal{P}$: $u \longrightarrow \frac{u^r}{r!}$.

Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^* \qquad S_r'' + 2S_r' = S_{r-1}.$$

4° Montrer que les suites $(R_i)_{0 \leq i \leq n}$ solutions de (1) sont celles qui s'expriment ainsi :

$$\begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n \end{bmatrix}$$

, où T est une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & & & \\ \lambda_1 & \lambda_0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ \lambda_n & \cdot & \cdot & \lambda_1\ \lambda_0 \end{bmatrix}$$

avec $\lambda_0 \neq 0$.

2ème partie

On veut calculer les coefficients des fonctions polynomiales S_r. A toute suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on associe l'endomorphisme δ_a de $\mathcal{P}$ tel que :

$$\forall P \in \mathcal{P} \quad \delta_a(P) = \sum_{n=0}^{N} a_n P^{(n)},$$

où N est au moins égal au degré de P.

.../...

1801

Si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels, on pose : $a.b = c$ où $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \, b_{n-i} .$$

1° Montrer qu'on a bien $\delta_a \in \mathfrak{L}(\mathfrak{P})$. Montrer que $\delta_{a.b} = \delta_a \, \delta_b$.

2° Soit, pour tout réel α, θ_α l'élément de $\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$:

$\theta_\alpha = \delta_a$, avec pour tout n : $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{2^n \, n\,!}$, $a_0 = 1$.

Montrer que $\theta_\alpha . \theta_\beta = \theta_{\alpha+\beta}$ pour tous réels α, β.

Quel est l'inverse de θ_α?

3° Trouver la suite a telle que $(2I + d)^{-r} = \delta_a$.

4° Exprimer les coefficients de la fonction polynomiale S_r.

3ème partie

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles qu'il n'existe aucun intervalle de longueur non nulle J sur lequel on ait :

$$\forall x \in J \qquad g(x) = 0 .$$

On cherche les couples (g, h) d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la propriété :

(2) la fonction $(x, y) \longmapsto g(x + y) \; h(xy)$ est un élément de $\mathcal{E}$.

1° Soient g et h deux éléments de $\mathcal{F}$. On considère les deux fonctions vectorielles X et Y définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$X(u) = (g'(u) - g(u), \quad ug'(u) + g(u), \quad g(u))$$
$$Y(t) = (h(t), \quad h'(t), \quad th'(t)) .$$

Montrer que (g, h) vérifie la propriété (2) si et seulement si, dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on a :

$$\forall x \, \forall y \qquad X(x + y) \quad \text{et} \quad Y(xy) \quad \text{sont orthogonaux.}$$

2° On a donc, pour tout (u, t) appartenant à une certaine partie fermée A de $\mathbb{R}^2$, $X(u).Y(t) = 0$. Préciser A. Montrer que si I et J sont des intervalles de longueur non nulle tels que $I \times J$ est inclus dans A, alors l'un au moins des deux cas suivants est vérifié :

a. L'ensemble des $X(u)$ où u parcourt I engendre une droite vectorielle;

b. L'ensemble des $Y(t)$ où t parcourt J engendre une droite vectorielle.

3° On note (E_m) l'équation différentielle (pour m réel) :

$$th''(t) + mh'(t) - h(t) = 0 .$$

Caractériser les solutions (g, h) du problème, en utilisant dans certains cas (E_m) pour certaines valeurs de m.

(On pourra d'abord montrer que pour tout segment I, il existe un intervalle de longueur non nulle J tel que $I \times J$ est inclus dans A).

4ème partie

Dans cette partie, on considère, pour tout réel $m > 0$, l'équation différentielle (E_m) définie dans la question précédente :

$$th''(t) + mh'(t) - h(t) = 0 .$$

1° Montrer qu'il existe une et une seule fonction φ_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, solution de (E_m) et telle que $\varphi_m(0) = 1$.

2° Montrer que si ψ est une solution de (E_m) non proportionnelle à φ_m, alors la fonction $\dfrac{\psi}{\varphi_m}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est proportionnelle à la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^{-m}}{(\varphi_m(t))^2}$.

3° En déduire $\lim\limits_{t \to 0^+} |\psi'(t)| = +\infty$.

Montrer que l'ensemble des solutions de (E_m) définies sur $\mathbb{R}$ est une droite vectorielle.

4° Exprimer $h_{1/2}$ et $h_{3/2}$ à l'aide de fonctions élémentaires.

$\varphi_{1/2}$ $\varphi_{3/2}$ FIN

1971

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail